Subject | بنى جبرية (١) م١٢ نظري   Date |

العدد (١) [illegible] ليس عدد أولي.
- المجموعة: هي عبارة عن جملة من الأشياء تشترك مع بعضها بصفة معينة.
العمليات على المجموعات:
- كل عنصر من هذه المجموعة ينتمي إلى المجموعة.
- علاقة عنصر بمجموعة = انتماء.
- علاقة مجموعة بمجموعة = اشتراك.
- $A \Delta B$ مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B
اجتماع العناصر التي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A:
رياضياً: $A \Delta B = A \setminus B \cup B \setminus A$
- $A \times B$ هو عبارة عن مجموعة كل الثنائيات

$$A \times B = \{(a,b) ; a \in A , b \in B\}$$

$$A \times A = \{(a,a) ; a, b \in a\}$$

M مجموعة جزئية ρ علاقة معرفة عليها.

$$M \times M$$

$N^* \times N^* = \{(1,1),(1,2),\ldots,(2,1),(2,2),\ldots,(n,n)\}$ مجموعة الأعداد الطبيعية (*)

عرفت المجموعة (*) على:

$\rho = \{(a,b) ; a \setminus b\}$ $(2,1)$, $(2,2)$

علاقة ثانية:
a مضاعف لـ b للعلاقة (*):
$(3,3)$, $(3,2)$, $(3,1)$, $(2,2)$, $(2,1)$

التطبيق رياضياً: $\forall x, y \in A ; x = y$
أدوات الربط المنطقية: $\Leftrightarrow$ الثنائية الشرطية
$\longrightarrow$ إذا كان فإن , $\vee$: أو
$\wedge$: و

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$
0	0	1	0	1
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1

علاقاتها:
قضية خطأ $0 \to$
قضية صح $1 \to$

- ملاحظة:
الاقتضاء خطأ
هناك صورة وحيدة لـ ع $\forall x,y \in A$
تطبيق
$\forall x,y \in A : x = y \Rightarrow f(x) = f(y)$ إما
هنا يوجد قضية

تعريف التباين:
كل عنصر من المستقر له صورة عنصر واحد من المنطلق على الأكثر
رياضيا:
$\forall x,y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
$\forall x,y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

- التطبيق الغامر:
كل عنصر من المستقر له صورة لعنصر واحد على الأقل من المنطلق

- التطبيق المتقابل:
هو تطبيق متباين وغامر

- تعاريف:

$$\rho \subseteq M \times M$$

$$\rho = \{\forall (a,a)\ a \in M\}$$ علاقة قطرية

- العلاقة الانعكاسية:
هي علاقة لواصفة (كل عنصر مرتبط بنفسه)
$\forall a \in M : a \rho a \quad : (1,2), (1,3)$
ليست انعكاسية $(2,3)$

- العلاقة التناظرية: يرتبط
$\forall x,y \in M : x \rho y \Rightarrow y \rho x$

علاقة يقسم ليست تناظرية
مثال: $(10,2)$ و $(2,10)$ $\Longleftrightarrow$ ليست تناظرية
لا يقسم   يقسم

مثال :

علاقة تناظرية تقبل القسمة على 5 ⇐ $1 = \frac{5}{5} = \frac{x-y}{5}$

- العلاقة التخالفية :

لها شكلان : $\forall x,y \in M ; x\rho y \wedge x \neq y \Rightarrow y\not\rho x$ (1

(2 $\forall x,y \in M ; x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$

- العلاقة المتعدية :

$\forall x,y,z \in \rho ; x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$

انتهت المحاضرة الأولى

* نقول عن علاقة انعكاسية كل عنصر يرتبط بنفسه

- تناظرية $\forall x,y \in \rho ; x\rho y \Rightarrow y\rho x$
- متعدية $\forall x,y,z \in \rho ; x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$
- تخالفية

$\forall x,y \in \rho ; x\rho y \wedge x \neq y \Rightarrow y \not\rho x$

$\forall x,y \in \rho ; x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y$

* M مجموعة و ρ علاقة معرفة على M

ρ ⟵ انعكاسية ، تناظرية ، متعدية } ⇐ تكافؤ ⇐ يوجد صفوف تكافؤ

$[a] = \bar{a}$ صف تكافؤ (a)

$M \neq \emptyset$ ρ تكافؤ

$= \{x : x \in M \wedge x\rho a \wedge y\rho a\}$

$= [x] = [y]$

كل عنصر من صف التكافؤ ممثلاً له.

تجزئة : نقول عن هذه الصفوف تشكل تجزئة لـ M إذا كان :

1] كل مجموعة جزئية $\neq \Phi$

2] تقاطع أي مجموعتين جزئيتين من $M = \Phi$

3] اجتماع كل مجموعات الجزئية من $M = M$

~~علاقة~~ علاقة تكافؤ على مجموعة M تحدد تجزئة لـ M

كل تجزئة لمجموعة M تعرف على M علاقة تكافؤ.

مثال: إثبات التكافؤ.
مجموعة Z $n \geq 1$
ρ علاقة على Z كما يلي:
$x \rho y \Leftrightarrow$ بلا باقي $\forall x, y \in Z : \frac{x-y}{n}$

$\forall x \in Z : x \overset{?}{\rho} x$

$\frac{x-x}{n} = \frac{0}{n} = 0 \Rightarrow x \rho x$
إذاً ρ انعكاسية.
- نثبت التناظر:
$\forall x, y \in Z ; x \rho y$ أي $x - y = nt ; t \in Z$
ومنه:
$-(-x+y) = nt \Rightarrow y - x = n(-t)$
ومنه: $y \rho x \Leftarrow \rho$ علاقة تناظرية.
$\forall x, y, z \in Z ; x \rho y \wedge y \rho z$
$x - y = nt ; t \in Z$
$y \rho z \Rightarrow y - z = nt_1 ; t_1 \in Z$
نجمع العلاقتين:
$x - z = n(t + t_1)$
بما أن t_1, t_2 من Z فإن مجموعهما من Z $t_1 + t_2 \in Z$
وبالتالي فإن $x \rho z \Leftarrow \rho$ علاقة تكافؤ.
- كل عنصر من M ينتمي إلى صف تكافؤ واحد
$a \in Z , [a] = [x : x \in Z ; x \rho a]$
$= [x : x \in Z ; x - a = nt , t \in Z]$
$= [x : x \in Z \wedge x = a + nt]$
ومنه مجموعة صفوف التكافؤ هي:
$[1], [2], \ldots, [n-1], [n]$
n صف تكافؤ حيث $[0] = [n]$

$n = 3$

$\forall x, y \in Z$

$x - y = 3t , t \in Z$

$[0] = \{x \in Z : x \rho 0\} = \{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$

$[1] = \{x \in Z : x \rho 1\} = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$

$[2] = \{x \in Z : x \rho 2\} = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots\}$

$[0] = [3] = \{x \in Z : x \rho 3\} = \{\dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \dots\}$

$[4] = [1]$

لدينا 3 صفوف تكافؤ

$n = 5 \Leftarrow$ 5 صفوف تكافؤ.

$n \Leftarrow$ n صنف تكافؤ.

وهذه العلاقة تسمى: التطابق أو التوافق بالقياس.

mod n

$x \rho y \Rightarrow x \equiv y \mod n$

Z_n مجموعة صفوف التكافؤ من Z بالقياس n.

مثال: $Z_3 = \{[0], [1], [2]\}$

$\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

$Z_n = \{0, 1, 2\}$

صفوف تكافؤ Z بالقياس n

علاقة الترتيب: مهم جداً.

$M \neq \phi$ $(M, \leq)$ علاقة ترتيب إذا كانت صفات:

1 انعكاسية

2 تخالفية

3 متعدية

- تسمى: ترتيب جزئي وعندئذ نقول لـ M إنها مجموعة مرتبة جزئياً

$X = \{a, b, c\}$ مجموعة.

$p(x)$ مجموعات المكونة لـ (عدد عناصرها 2^n) حيث n عدد عناصر المجموعة
(⊆ و $p(x)$) علاقة الاحتواء.
كل مجموعة تحتوي على نفسها ⇐ انعكاسية
⊆ تخالفية ⇐ علاقة ترتيب جزئي
⊆ متعدية
- المجموعة $p(x)$ هي مجموعة مرتبة جزئية وفقا لعلاقة الاحتواء.
* الترتيب الكلي:
- أي عنصر من M متقاربين مثنى مثنى وفق ≤
- الاحتواء علاقة ترتيب جزئي وليس كلي.
- علاقة (يقسم) علاقة احتواء جزئي.
- علاقة الترتيب كلي هي علاقة ترتيب جزئي وكل عنصرين متقاربين مثنا مثنى وفق ≤
تعاريف:
$(M, \leq)$ مجموعة مرتبة ولتكن $a, b, c, d \in M$
نقول عن (a) أنه عنصر أصغري في M إذا كان أصغر من جميع عناصرها $\forall x \in M : a \leq x$
إن وجد العنصر الأصغر فهو وحيد.
في Z غير موجود العنصر الأصغر.
نقول عن (b) أنه أكبر (أعظم) إذا كان أكبر من جميع عناصرها.
$\forall x \in M : b \geq x$
إن وجد فهو وحيد
Z^+ العنصر الأكبر غير موجود.
(c) عنصر أصغري:
$x \in M : x \leq c \Rightarrow x = c$
ليس بالضرورة وجوده واحيانا ليس من الضروري وحدانيته.

Date

$\{[a],[b,c],[d],[e,f],[a,b,c]\}$.

لا يوجد عنصر أصغري ولا عنصر أكبري.

$[a]$ أصغري

$[b,c]$ أصغري.

$[e,f]$ و $[d]$ أصغريان.

$[a,b,c]$ ليسا أصغريان.

$[d]$ عنصر أكبري.

$\forall x,y \in M ; y \geq d \Rightarrow y = d$

- كل أعظم هو أعظمي والعكس غير صحيح
- كل أصغر هو أصغري والعكس غير صحيح
- بالمجموعات المرتبة كلياً يكون العكس صحيح.

العدد (1) عنصر أصغر بالنسبة إلى N^* وفق علاقة تقسيم

ولكن لا يوجد أعظم.

انتهت محاضرة الثانية ..